ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 47 **Межвузовский сборник научных трудов** **2015**

УДК 531.31+62-50

М.Х. Тешаев

Бухарский инженерно-технологический институт

Республика Узбекистан
705017, Бухара, ул. К. Муртазаева, 15
muhsin_5@mail.ru, _Muhsin. Teshayev@rambler.ru
+99865-222-94-90 (дом.); +99893-681-0431 (сот.)

ОБ ОТЫСКАНИИ СТРУКТУРЫ СИЛ РЕАКЦИЙ СЕРВОСВЯЗЕЙ В СИСТЕМАХ, СТЕСНЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

Рассматривается механическая система, стесненная геометрическими сервосвязями. С учетом параметрического освобождения системы от сервосвязей на (А)-перемещениях в явном виде составлены уравнения движения и представлен явный вид сил реакций сервосвязей. Получены условия устойчивости.

Ключевые слова: сервосвязь; (А)-перемещения; реакция сервосвязи; устойчивость; многообразие сервосвязей; уравнения движения; параметрическое освобождение.

Введение

Динамике систем с сервосвязями к настоящему моменту посвящено значительное число исследований. К ним можно отнести работы А. Бегена [1], П. Аппеля [2], А. Пщеборского [3], В.С. Новосёлова [4], М.Ф. Шульгина [5], В.В. Румянцева [6; 7], В.И. Киргетова [8], А.Г. Азизова [9; 10] , Ш.С. Нугмановой [11] и других. В этих исследованиях большое внимание было уделено на особенности составления уравнений движения исходя из общих принципов механики, причем длительное время для сервовязей принималась модель неосвобждающих неидеальных связей.

В последние годы теория систем с сервосвязями стала разрабатываться с учетом освобождаемости и необходимости устойчивой реализации соотношений сервосвязей. Эти вопросы нашли отражение в ряде работ А.Г.Азизова [9; 10], основанных на теории параметрического освобождения [12], и теорию вынужденных движений [13].

А.Г. Азизов [9; 10] предложил важный для приложений конструктивный метод отыскания структуры сил реакций сервосвязей, обеспечивающий стабилизацию движения системы относительно многообразия, определяемого сервосвязями.

К системам с сервосвязями близка теория построения систем программного движения [14], созданная в основном работами А.С. Галиуллина и его учеников.

В данной работе выведены уравнения движения систем в явном виде, стесненных геометрическими связями первого и второго рода, а также определен вид сил реакций сервосвязей.

Составление уравнений движения

Пусть на механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1,\ldots,q_n$, наложены геометрические сервосвязи [1] вида:

$$\Phi_\alpha(t,q_1,\ldots,q_n)=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,a). \tag{1}$$

Предполагается, что среди возможных перемещений δq_i имеются такие, которые определяются независимыми уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\theta_1 i}(t,q_1,\ldots,q_n)\delta q_i=0, \quad (\theta_l=1,\ldots,a), \tag{2}$$

и для которых реакции связей второго рода работы не производят [1]. Возможные перемещения, удовлетворяющие условиям (2), будем называть (А)-перемещениями [2].

Используя параметрическое освобождение систем от сервосвязей [3; 4], введем дополнительные независимые величины

η_p, соответствующие преобразованию системы с сервосвязями (1), к виду:

$$\Phi^*_\alpha(t, q_1, ..., q_n, \eta_1, ..., \eta_a) = 0\,, \qquad (\alpha=1, ..., a), \qquad (3)$$

где $\eta_1, ..., \eta_a$ – параметры, характеризующие освобождение системы от сервосвязей (1). Нулевые значения параметров η_p и их производных $\dot{\eta}_p$ соответствуют связям (1) и их продифференцированным формам. Этими параметрами могут быть, например, левые части уравнений (1), вычисляемые на действительном движении системы [5].

Определяя работу принуждений на перемещениях $\delta\eta_p$ выражением

$$\sum_{p=1}^{a} N_p \cdot \delta\eta_p\,,$$

для параметрически освобожденной системы будем иметь

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} R_i^{(2)} \cdot \delta q_i + \sum_{p=1}^{a} N_p \cdot \delta\eta_p\,, \qquad (4)$$

где $R_i^{(2)}$ – реакции связей второго рода.

Пусть из способа действия реакций связей второго рода следует, что на (A)-перемещениях работа реакций связей второго рода равна нулю как для неосвобожденной, так и параметрически освобожденной системы. Тогда при произвольных принуждениях реакций работа (4) обратится в нуль при условиях:

$$\delta\eta_p=0, \qquad (p=1, ... a).$$

Предполагая, что уравнения (1) разрешимы относительно обобщенных координат $q_1, ..., q_a$, с учетом уравнений (3) вместо $q_1, ..., q_a$ введем параметры $\eta_1, ..., \eta_a$. Тогда уравнения (1) будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\theta_1 i}(t, \eta_1, ..., \eta_a, q_{a+1}, ..., q_n)\delta\chi_i = 0\,, \; (\theta_1=1, ..., a), \qquad (5)$$

где $\chi_\alpha = \eta_\alpha$, $(\alpha=1, ..., a)$; $\chi_{a+s} = q_{a+s}$ $(s=1, ..., n-a)$.

Как известно [3; 4] для таких систем принцип Даламбера–Лагранжа может быть записан в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\chi}_i}-\frac{\partial T}{\partial\chi_i}-Q_i\right)\delta\chi_i=0, \tag{6}$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_i – обобщенная сила, соответствующая координате χ_i.

Тогда из (6) методом (A)-перемещений получим уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\chi}_i}-\frac{\partial T}{\partial\chi_i}=Q_i+\sum_{\theta_1=1}^{a}\lambda_{\theta_1}\overset{*}{a}_{\theta_1 i}, \quad (I=1,...,n) \tag{7}$$

где λ_{θ_1} – множители связей второго рода.

Предположим, что все связи, налагаемые на систему, стационарны. Тогда кинетическая энергия параметрически освобожденной системы будет иметь вид:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{a}\sum_{p=1}^{a}A_{\alpha p}\dot{\eta}_\alpha\dot{\eta}_p+\sum_{\alpha=1}^{a}\sum_{s=1}^{n-a}A_{\alpha,a+s}\dot{\eta}_\alpha\dot{q}_{a+s}+$$
$$+\sum_{S=1}^{n-a}\sum_{S_1=1}^{n-a}A_{a+s,a+s_1}\dot{q}_{a+s}\dot{q}_{a+s_1},$$

где коэффициенты квадратичных форм $A_{\alpha p}, A_{\alpha,a+s}, A_{a+s,a+s_1}$ есть функции от $\eta_1,...,\eta_a$, $q_{a+1},...,q_n$ и уравнения (7) в явной форме могут быть записаны в виде:

$$\sum_{p=1}^{a}A_{\alpha p}\ddot{\eta}_p+\sum_{s=1}^{n-a}A_{\alpha,a+s}\ddot{q}_{a+s}+\sum_{p=1}^{a}\sum_{\alpha_1=1}^{a}[p,\alpha_1,\alpha]\dot{\eta}_p\dot{\eta}_{\alpha_1}+$$
$$+\sum_{p=1}^{a}\sum_{s=1}^{n-a}[p,a+s,\alpha]\dot{\eta}_p\dot{q}_{a+s}+\sum_{s=1}^{n-a}\sum_{s_1=1}^{n-a}[a+s,a+s_1,\alpha]\cdot\dot{q}_{a+s}\dot{q}_{a+s_1}=,$$
$$=Q_\alpha+R_\alpha^{(2)} \qquad (\alpha=1,...,a);$$

$$\sum_{\alpha=1}^{a}A_{\alpha,a+s}\ddot{\eta}_\alpha+\sum_{s_1=1}^{n-a}A_{a+s,a+s_1}\ddot{q}_{a+s_1}+$$
$$+\sum_{s_1=1}^{n-a}\sum_{s_2=1}^{n-a}[a+s_1,a+s_2,a+s]\dot{q}_{a+s_1}\dot{q}_{a+s_2}+$$

$$+\sum_{p=1}^{a}\sum_{\alpha=1}^{a}[\alpha, p, a+s]\dot{\eta}_p\dot{\eta}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{a}\sum_{s_1=1}^{n-a}[\alpha, a+s_1, a+s]\cdot\dot{q}_{a+s_1}\dot{\eta}_\alpha = ,$$

$$=Q_{\alpha+s}+R^{(2)}_{\alpha+s};$$

$$(s = 1, \ldots, (n\text{-}a)) \qquad (8)$$

где $[p,\ a+s,\ \alpha]$ – символы Кристоффеля первого рода [6].

Устойчивость. Движение, выполняемое объектом управления (ОУ) на многообразии, определяемом сервосвязями (1), примем за невозмущенное, а все другие движения, выполняемые на многообразии, определяемое уравнениями (3) – возмущенными. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Управляемая система (8) всегда может быть стабилизирована относительно многообразия, определяемого сервосвязями вида (1).

Доказательство. Пусть реакции сервосвязей $R^{(2)}_\alpha, R^{(2)}_{a+s}$ формированы по законам:

$$R^{(2)}_\alpha=\sum_{s=1}^{n-a}\sum_{s_1=1}^{n-a}[a+s, a+s_1, \alpha]^o\dot{q}_{a+s}\dot{q}_{a+s_1}-Q^o_\alpha-\sum_{p=1}^{a}\left(K'_{\alpha p}\dot{\eta}_p+K''_{\alpha p}\dot{\eta}_p\right),$$

$$(\alpha=1,\ldots,a),$$

$$R^{(2)}_{\alpha+s}=\sum_{s_1=1}^{n-a}\sum_{s_2=1}^{n-a}[a+s_1, a+s_2, \alpha+s]^o\dot{q}_{a+s_1}\dot{q}_{a+s_2}-Q^o_{\alpha+s},$$

$$(s=1,\ldots,(n\text{-}a)). \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8), и выразив $\ddot{q}_{a+s_1}$ из первой группы a уравнений преобразованной системы (8), получим систему уравнений возмущенного движения:

$$\sum_{p=1}^{a}\widetilde{A}_{\alpha p}\ddot{\eta}_p+\sum_{p=1}^{a}B_{\alpha p}\dot{\eta}_p+\sum_{p=1}^{a}\widetilde{C}_{\alpha p}\eta_p+\widetilde{\mathrm{X}}_\alpha\left(\eta_p^2,\dot{\eta}_p^2\right)=0,\ (\alpha=1,\ldots,a), \qquad (10)$$

где

$$\widetilde{A}_{\alpha p}=\widetilde{A}_{\alpha p}(\eta_p,q_{a+s}),\ B_{\alpha p}=B_{\alpha p}(\eta_p,q_{a+s}),\ \widetilde{C}_{\alpha p}=\widetilde{C}_{\alpha p}(\eta_p,q_{a+s}).$$

Рассмотрим условия устойчивости тривиального решения системы (10): $\qquad \eta_p=0, \quad (p=1,\ldots,a).$

При обозначениях

$$\dot{\eta}_p = x_p, \qquad \eta_p = x_{a+p}, \qquad (p=1,...,a)$$

уравнения (10) могут быть записаны в виде

$$\frac{dx_{i_1}}{dt} = p_{i_1 1}(t)x_1 + ... + p_{i_1 n_1}x_{n_1} + \varphi_{i_1}(t, x_1, ..., x_{n_1}); \tag{11}$$

$$(i_1=1,..., n_1=2a),$$

где

$$\left(\begin{array}{c:c} E_{\alpha p} & 0 \\ \hdashline -\dfrac{\sum\limits_{\alpha_1=1}^{a} \widetilde{A}^{p\alpha_1} B_{\alpha_1 \alpha}}{\left|\widetilde{A}_{\alpha p}\right|} & -\dfrac{\sum\limits_{\alpha_1=1}^{a} \widetilde{A}^{p,a+\alpha_1} C_{\alpha_1 \alpha}}{\left|\widetilde{A}_{\alpha p}\right|} \end{array}\right)$$

$$\varphi = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline -\dfrac{1}{\left|\widetilde{A}_{\alpha p}\right|} \sum\limits_{p=1}^{a} A^{\alpha p} \mathrm{X}_p \end{array}\right).$$

Уравнения (11) представляют собой систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Устойчивость этой системы по отношению к многообразию, определяемому сервосвязями (1), будем рассматривать, используя методы исследований устойчивости неустановившихся систем [7].

Введем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx_{i_1}}{dt} = d_{i_1 1}x_1 + d_{i_1 2}x_2 + ... + d_{i_1 n_1}x_{n_1}, \tag{12}$$

$$(i_1=1,...,n_1=2a),$$

где функции

$$d_{i_1 1}, d_{i_1 2}, ..., d_{i_1 n_1}, \; (i_1 = 1,..,n_1)$$

выбираются исходя из следующих трех случаев.

Случай 1. Существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} p_{i_1 j_1}(t) = d_{i_1 j_1}, \ (i_1, j_1 = 1, \ldots, n_1).$$

Случай 2. $p_{i_1 j_1}(t)$ – периодические функции времени одного и того же периода θ_3.

$$d_{i_1 j_1} = \frac{1}{\theta_3}\int_o^{\theta_3} P_{i_1 j_1}(\zeta)d\zeta, \quad (i_1, j_1 = 1, \ldots, n_1 = 2a).$$

Случай 3. Фиксируем некоторый момент времени $t=t_0\geq 0$ и

$$d_{i_1 j_1} = p_{i_1 j_1}(t_o), \quad (i_1 j_1 = 1, \ldots, n_1 = 2a).$$

В случаях 1, 2 и 3 предполагается, что корни λ_{i_1} характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\lambda & d_{12} \ldots & d_{1,n_1} \\ d_{21} & d_{22} \ldots & d_{2,n_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \ \ldots & \ldots \\ d_{n_1,1} & d_{n_1 2} \ldots d_{n_1 n_1} & -\lambda \end{vmatrix}_{(n_1=2a)} = 0$$

системы (12) удовлетворяют неравенству

$$R_e \lambda_{i_1} < -\delta_1, \qquad (\delta_1 > 0;\ i_1 = 1, \ldots, 2a).$$

Когда вспомогательная система (12) выбрана, исследования проводим следующим образом. Задаем определенно-отрицательную форму

$$w(x) = \sum_{i_1=1}^{2a}\sum_{j_1=1}^{2a} C_{i_1 j_1} x_{i_1} x_{j_1}$$

и строим функцию

$$\upsilon(x) = \sum_{i_1=1}^{2a}\sum_{j_1=1}^{2a} a_{i_1 j_1} x_{i_1} x_{j_1}, \tag{13}$$

удовлетворяющую условиям

$\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{12} = w(x)$, где $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{12}$ – производная, вычисленная в силу уравнений (12).

Коэффициенты $a_{i_1 j_1}$ квадратичной формы (13) определяются из системы уравнений

$$C_{i_1 j_1} = \sum_{\kappa=1}^{2a} \left(a_{i_1\kappa} d_{\kappa j_1} + a_{j_1\kappa} d_{\kappa} i_1 \right), \; (i_1, j_1 = 1, \ldots, n_1 = 2a).$$

При этом предполагается, что последняя система уравнений разрешима относительно $a_{i_1 j_1} \left(i_1 j_1 = 1, \ldots, 2a \right)$, т.е. дефект матрицы

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \ldots d_{1,n_1} \\ d_{21} & d_{22} \ldots d_{2,n_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \; \ldots \; \ldots \\ d_{n_1,1} & d_{n_1 2} \ldots d_{n_1 n_1} \end{pmatrix}_{(n_1 = 2a)}$$

равен нулю.

Вычислим $\left(\dfrac{d\upsilon}{dt} \right)_{(11)}$:

$$\left(\frac{d\upsilon}{dt} \right)_{(11)} = w(x) + \sum_{i_1=1}^{2a} \sum_{j_1=1}^{2a} \sum_{\kappa=1}^{2a} \left(a_{i_1 j_1} \left[P_{j_1\kappa}(t) - d_{j_1\kappa} \right] + \right.$$

$$\left. + a_{\kappa j_1} \left[P_{j_1 i_1}(t) - d_{j_1 i_1} \right] \right) x_{i_1} \cdot x_{\kappa} + \sum_{i_1=1}^{2a} \sum_{j_1=1}^{2a} a_{i_1 j_1} x_{j_1} \cdot \varphi_{i_1}(t, x).$$

Очевидно [7], что любую функцию $\varphi_{i_1}(t, x)$ можно представить в виде

$$\varphi_{i_1}(t, x) = \sum_{\kappa=1}^{2a} h_{i_1\kappa}(t, x) \cdot x_{\kappa}, \; (i_1 = 1, \ldots, n_1 = 2a).$$

Поэтому

$$\left(\frac{d\upsilon}{dt} \right)_{(11)} = \sum_{i_1=1}^{2a} \sum_{j_1=1}^{2a} \sum_{\kappa=1}^{2a} \left(C_{i_1\kappa} + a_{i_1 j_1} \left[P_{j_1\kappa}(t) - d_{j_1\kappa} \right] + \right.$$

$$\left. + a_{\kappa j_1} \left[P_{j_1 i_1}(t) - d_{j_1 i_1} \right] + a_{i_1 j_1} \cdot h_{j_1\kappa}(t, x) + a_{\kappa j_1} \cdot h_{j_1 i_1}(t, x) \right) x_{i_1} x_{\kappa}. \quad (14)$$

Для асимптотической устойчивости решения x=0 системы (11) достаточно, чтобы форма переменных $\{x_{i_1} x_\kappa\}$ в правой части равенства (14) была определенно-отрицательной.

Как известно, условия определенной положительности квадратичной формы

$$\sum_{i_1=1}^{2a}\sum_{\kappa=1}^{2a} e_{i_1 k} x_{i_1} x_\kappa = -\frac{d\upsilon}{dt}$$

задаются неравенствами Сильвестра [8]:

$$\Delta_{n_1} > 0,\ \Delta_{n_1-1} > 0,\dots,\quad \Delta_1 > 0 \qquad (15)$$

$$(n_1 = 2a),$$

где $\Delta_{n_1},\dots,\Delta_1$ – главные диагональные миноры $\left\| e_{i_1\kappa} \right\|_1^{2a}$.

Так как $e_{i_1\kappa}(i_1,\kappa = 1,\dots,2a)$ являются переменными, то для определенной отрицательности $\left(\dfrac{d\upsilon}{dt}\right)$, вообще говоря, недостаточно выполнения условий (15). Неравенства Сильвестра должны выполняться равномерно по всем $x_1,\dots, x_{2a}$, т.е. следует потребовать выполнения неравенств:

$$\Delta_{n_1} > \gamma_1,\quad \Delta_{n_1-1} > \gamma_1,\quad \dots,\ \Delta_1 > \gamma_1 \qquad (16)$$

$$(\gamma_1 > 0;\ \ n_1 = 2a).$$

Условия (15) и (16) выражают условия асимптотической устойчивости системы (11).

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу А. Бегена с пластинкой и диском [1; 3; 4]. Пластинка Σ, расположенная в неподвижной горизонтальной плоскости, шарнирно связана в точке C с круглым диском Σ_1, вращающимся в этой же плоскости вокруг своего неподвижного центра O.

В точке A, лежащей на прямой, соединяющей точку C с центром тяжести G пластинки Σ, на пластинку действует постоянная сила $\overline{F}$, параллельная неподвижной прямой Ox. Сервомотор M при помощи особого сцепления действует на диск Σ_1, поворачивая его так, чтобы линии OC и CA оставались перпендикулярными друг другу; тем самым реализуется связь

$$\alpha - \beta - \frac{\pi}{2} = 0, \tag{17}$$

где $\angle \alpha = (\widehat{Ox, OC})$, $\angle \beta = (\widehat{Ox, CA})$

и пусть $OC = r_1$, $CA = a$, $CO_1 = b_1$.

Принимая за обобщенные координаты α и β, запишем кинетическую энергию системы в виде [1; 3]:

$$T = \frac{1}{2}\left[r_1^2\dot{\alpha}^2 + \left(\kappa_2^2 + b_1^2\right)\dot{\beta}^2 + 2r_1b_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \cos(\alpha - \beta)\right] + \frac{1}{2}J_1 \cdot \dot{\alpha}^2,$$

где m – масса пластинки; κ_2 – ее радиус инерции относительно точки; J_1 – момент инерции диска относительно оси вращения.

Из выражения возможной работы силы $\overline{F}$

$$\delta F = F\delta(r_1 \cdot cos\alpha + a \cdot cos\beta)$$

следует, что обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам α, β будут иметь вид:

$$Q_\alpha = -F \cdot r_1 \cdot sin\alpha, \qquad Q_\beta = -F \cdot a \cdot sin\beta.$$

Так как сервомотор M действует на диск $\sum_1$, то (A)-перемещения будут иметь вид $\delta\alpha = 0$.

Тогда уравнения движения в обобщенных координатах α и β записываются в виде

$$\left(mr_1^2 + J_1\right)\ddot{\alpha} + mr_1b_1 \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \ddot{\beta} + mr_1b_1 \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot \dot{\beta}^2 =$$
$$= F \cdot r_1 \cdot \sin\alpha + \Lambda,$$
$$mr_1b_1 \cdot \cos(\alpha - \beta)\ddot{\alpha} + m\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)\ddot{\beta} - mr_1b_1 \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot \dot{\alpha}^2 =$$
$$= -F \cdot a \cdot \sin\beta \quad (i_1, j_1 = 1, \ldots, n_1 = 2a), \tag{18}$$

где Λ – реакция сервосвязи (17)

С учетом сервосвязи (17) из системы уравнений (18) получим уравнение движения

$$m\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)\ddot{\beta} - mr_1b_1 \cdot \dot{\beta}^2 + F \cdot a \cdot \sin\beta = 0. \tag{19}$$

Так как сервосвязи выполняются не точно, а с некоторым освобождением, то наряду со связью (17) имеет место и уравнение [3; 4]:

$$\alpha - \beta - \frac{\pi}{2} - \eta = 0, \tag{20}$$

где η – параметр освобождения.

Вводя соотношениями

$$\beta = \chi, \qquad \alpha = \chi + \frac{\pi}{2} + \eta$$

переменные χ и η, кинетическую энергию системы приведем к виду:

$$\widetilde{T}(\chi,\eta,\dot{\chi},\dot{\eta}) = \frac{1}{2}\left[m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1\right]\dot{\chi}^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(mr_1^2 + J_1\right)\dot{\eta}^2 + \left(mr_1^2 - mr_1b_1 \cdot \sin\eta + J_1\right)\dot{\chi}\dot{\eta}\,.$$

Обобщенные силы, соответствующие переменным χ и η, которые вычислены на (А)-перемещениях

$$\delta\chi + \delta\eta = 0, \tag{21}$$

будут иметь вид:

$$Q_\chi = -F[a \cdot sin\chi + r_1 \cdot cos(\chi+\eta)],$$
$$Q_\eta = -F \cdot r_1 \cdot cos(\chi+\eta)],$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных χ и η на (А)-перемещениях (21) выглядят так:

$$\left[m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1\right] \cdot \ddot{\chi} +$$
$$+\left[mr_1\left(r_1 - b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1\right]\ddot{\eta} - mr_1b_1 \cdot \cos\eta \cdot \dot{\eta}^2 - 2 \cdot mr_1b_1 \cdot$$
$$\cdot \cos\eta \cdot \dot{\chi}\dot{\eta} = -F\left[a \cdot \sin\chi + r_1 \cdot \cos(\chi + \eta)\right] + \lambda',$$
$$\left[mr_1\left(r_1 - b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1\right] \cdot \ddot{\chi} + \left(mr_1^2 + J_1\right)\ddot{\eta} +$$
$$+ mr_1b_1 \cdot \cos\eta \cdot \dot{\chi}^2 = -F \cdot r_1 \cdot \cos(\chi + \eta) + \lambda', \tag{22}$$

где λ' – множитель Лагранжа параметрически освобожденной системы. Исключая из первого уравнения системы (22) множитель λ', получим уравнение движения параметрически освобожденной системы

$$m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - r_1b_1 \cdot \sin\eta\right)\ddot{\chi} - mr_1b_1 \cdot \sin\eta \cdot \ddot{\eta} - mr_1b_1 \cdot$$
$$\cdot \cos\left(\dot{\chi}^2 + \dot{\eta}^2\right) - 2mr_1b_1 \cdot \cos\eta \cdot \dot{\chi}\dot{\eta} + F \cdot a \cdot \sin\chi = 0\,. \tag{23}$$

При $\eta = 0$ система (22)–(23) переходит в предельную систему:

$$m\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)\ddot{\beta} - mr_1b_1\ \dot{\beta}^2 + F \cdot a \cdot \sin\beta = 0\,,$$
$$\left[m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2\right) + J_1\right] \cdot \ddot{\beta} + F\left[a \cdot \sin\beta + r_1 \cdot \cos\beta\right] = \lambda\,, \tag{24}$$

которая совпадает с результатами, полученными в работах А.Г. Азизова [9].

В работе [10], трактуя сервосвязь (17) как условную связь, В.И. Киргетов приходит к выводу, что первое уравнение системы (24) "…является динамичесим условием выполнения условной связи", а второе уравнение – "…уравнением движения". В свое время А.Г. Азизов [11, с. 9] и В.В. Румянцев [12, с. 781] показали ошибочность данного утверждения. Однако, несмотря на это, М.Н. Сидиков [13], повторяя ошибку В.И. Киргетова, утверждает, что первое уравнение системы (24) представляет собой "условие динамичности" и, что это же уравнение имеет "...заранее заданное движение, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \quad \beta = 0$". (25)

Далее из первого интеграла первого уравнения системы (24) следует, что частное решение $\beta = 0$ неустойчиво. К такому выводу М.Н. Сидиков пришел вследствие того, что исследовал не сервовязь (17), а "… заранее заданное движение" (25).

Заключение, сделанное М.Н. Сидиковым [13] тоже вызывает сомнение. Поскольку, в постановке задачи [3; 4; 9] было оговорено, что "…сервомотор действует на диск…" и управляемость этой системы была доказана А.Г. Азизовым в работе [14].

Определив выражение $mr_1b_1 \cdot \cos\eta \cdot \dot{\chi}^2$ из (22) и подставляя его во второе уравнение системы (22), получим

$$\left[m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1\right]\ddot{\chi} + \left[mr_1\left(r_1 - b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1\right]\ddot{\eta} - \\ - mr_1b_1 \cdot \cos\eta \cdot \dot{\eta}^2 - 2 \cdot mr_1b_1 \cdot \cos\eta \cdot \dot{\chi}\dot{\eta} + \\ + F\left[a \cdot \sin\chi + r_1\cos\left(\chi + \eta\right)\right] = \lambda'. \tag{26}$$

Для определения структур силы реакции сервосвязи решим уравнение (23) относительно $\ddot{\chi}$, т.е.

$$\ddot{\chi} = \frac{mr_1b_1 \cdot \sin\eta}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - r_1b_1 \cdot \sin\eta\right)}\ddot{\eta} + \frac{mr_1b_1 \cdot \cos\eta}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - r_1b_1 \cdot \sin\eta\right)} \cdot \left(\dot{\chi}^2 + \dot{\eta}^2\right) - \\ - \frac{F \cdot a \cdot \sin\chi}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - r_1b_1 \cdot \sin\eta\right)},$$

и подставляя его в (22), получим:

$$\left\{ \left[mr_1(r_1 - b_1 \cdot \sin\eta) + J_1\right] + \left[m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1\right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right)}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right)} \right\} \ddot{\eta} - 2mr_1 b_1 \cdot \cos\eta \cdot \chi \, \dot{\eta} +$$

$$+ mr_1 b_1 \cdot \cos\eta \cdot \frac{m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right)} \dot{\chi}^2 -$$

$$- mr_1 b_1 \cdot \cos\eta \cdot \left[1 - \frac{m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right)}\right] \dot{\eta}^2 +$$

$$+ F \cdot a \cdot \sin\chi \left[1 - \frac{m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right) + J_1}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2 - 2r_1 b_1 \cdot \sin\eta\right)}\right] +$$

$$+ F \cdot r_1 \cdot \cos(\chi + \eta) = \lambda'. \qquad (27)$$

Если, согласно (9), реакцию λ' сервосвязи задать законом

$$\lambda' = mr_1 b_1 \frac{m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2\right) + J_1}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)} \dot{\chi}^2 - F \cdot a \cdot \sin\chi +$$

$$+ F \cdot a \cdot \sin\chi \cdot \frac{m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2\right) + J_1}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)} - F \cdot r_1 \cdot \cos\chi - h_1 \dot{\eta} - h_o \eta,$$

то из (27) получим:

$$\widetilde{A}\,\ddot{\eta} + \widetilde{B}\,\dot{\eta} + \widetilde{C}\eta + D\dot{\eta}^2 + E\eta^2 = 0, \qquad (28)$$

где

$$\widetilde{A} = \left[m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2\right) + J_1\right] \frac{mr_1^2 + J_1}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)} + mr_1^2 + J_1;$$

$$\widetilde{B} = h_1 - 2mr_1 b_1 \left[1 - \frac{m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2\right) + J_1}{m\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)}\right] \dot{\chi}^2;$$

$$\widetilde{C} = \frac{(mr_1 b_1)^2 \left[m\left(r_1^2 + b_1^2 + \kappa_2^2\right) + J_1\right] - 2m^3 r_1^2 b_1^2 \left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)}{m^2\left(b_1^2 + \kappa_2^2\right)^2} +$$

$$+h_o-\frac{2(mr_1b_1)^2}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\dot{\chi}^2-\frac{2mr_1b_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\cdot F\cdot a\cdot\sin\chi-F\cdot r_1\cdot\sin\chi;$$

$$\widetilde{D}=-mr_1b_1\left[1-\frac{m(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2)+J_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\right];$$

$$E=-F\cdot r_1\cdot cos\chi. \qquad (29)$$

Из (29) видно, что уравнения (28) представляет собой дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами.

Разделив обе части (28) на $\widetilde{A}$, и вводя обозначения $\dot{\eta}=x_1, \eta{=}x_2$, уравнение (28) приведем к виду

$$\dot{x}_1=-B^*x_1-C^*x_2-D^*x_1^2-E^*x_2^2,$$
$$\dot{x}_2=x_1, \qquad (30)$$

где

$$B^*=\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{A}},\qquad C^*=\frac{\widetilde{C}}{\widetilde{A}},\qquad D^*=\frac{D}{\widetilde{A}},\qquad E^*=\frac{E}{\widetilde{A}}.$$

Условия устойчивости системы (30) исследуем методом, предложенным в работе [7].

Вспомогательная система уравнений будет иметь вид:

$$\dot{x}_1=-B_*^o x_1-C_*^o x_2-D_*^o x_1^2-E_*^o x_2^2,$$
$$\dot{x}_2=x_1, \qquad (31)$$

где $B_*^o, C_*^o, D_*^o, E_*^o$ – значения функций в начальной точке

$$\chi=\chi^0,\quad \dot{\chi}=\dot{\chi}^o,$$

т.е.

$$B_*^o=\left\{h_1-2mr_1b_1\left[1-\frac{m(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2)+J_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\right]\dot{\chi}^o\right\}:$$

$$:\left\{\frac{mr_1^2+J_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\left[m(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2)+J_1\right]+mr_1^2+J_1\right\};$$

$$C_*^o = \left\{ h_o - \frac{2(mr_1b_1)^2}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\dot{\chi}^o - \frac{2mr_1b_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)} F\cdot a\cdot\sin\chi^o - F\cdot r_1\cdot\sin\chi^o + \right.$$

$$\left. + \frac{(mr_1b_1)^2\left[m_1\left(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2\right)+J_1\right] - 2m^3r_1^2b_1^2\left(b_1^2+\kappa_2^2\right)}{m^2\left(b_1^2+\kappa_2^2\right)} \right\} :$$

$$: \left\{ \frac{mr_1^2+J_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\left[m\left(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2\right)+J_1\right] + mr_1^2 + J_1 \right\};$$

$$D_*^o = -mr_1b_1\left[1 - \frac{m\left(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2\right)+J_1}{m\left(b_1^2+\kappa_2^2\right)}\right] : \left[m\left(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2\right)+J_1\right]\cdot$$

$$\left. \cdot\frac{mr_1^2+J_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)} + mr_1^2 + J_1 \right\};$$

$$E_*^o = -F\cdot r_1\cdot\cos\chi^o / \widetilde{A}\,.$$

При этом необходимо, чтобы корни характеристического уравнения $\lambda^2 + B_*^o\lambda + C_*^o = 0$ системы первого приближения

$$\dot{x}_1 = -B_*^o x_1 - C_*^o x_2\,,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \qquad (32)$$

имели отрицательные вещественные части. Эти условия согласно критерию Гурвица [8] имею вид:

$$B_*^o > 0, \qquad C_*^o > 0\,,$$

или, так как $\widetilde{A} > 0$,

$$h_1 - 2mr_1b_1\left[1 - \frac{m\left(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2\right)+J_1}{m\left(b_1^2+\kappa_2^2\right)}\right]\dot{\chi}^o > 0\,,$$

$$h_o - \frac{2(mr_1b_1)^2}{m(b_1^2+\kappa_2^2)}\dot{\chi}^o - \frac{2mr_1b_1}{m(b_1^2+\kappa_2^2)} F\cdot a\cdot\sin\chi^o - F\cdot r_1\cdot\sin\chi^o +$$

$$+ \frac{(mr_1b_1)^2\left[m\left(r_1^2+b_1^2+\kappa_2^2\right)+J_1\right] - 2m^3r_1^2b_1^2\left(b_1^2+\kappa_2^2\right)}{m^2\left(b_1^2+\kappa_2^2\right)^2} > 0\,. \qquad (33)$$

Задаем определенно-отрицательную форму

$$w\left(x_1, x_2\right) = -B_*^o\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

и строим функцию

$$\upsilon\left(x_1, x_2\right) = \sum_{j_1=1}^{2}\sum_{i_1=1}^{2} a_{ij_1} x_{i_1} x_{j_1},$$

удовлетворяющую условиям

$$\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{32} = w\left(x_1, x_2\right).$$

При этом коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{13} определяются из системы уравнений

$$-B_*^o = 2\cdot a_{11}\cdot\left(-B_*^o\right) + 2a_{12},\ -B_*^o = 2\cdot a_{12}\cdot\left(-C_*^o\right),$$

$$0 = a_{11}\left(-C_*^o\right) + a_{12}\left(-B_*^o\right) + a_{22},$$

т.е.

$$a_{12} = \frac{B_*^o}{2C_*^o},\quad a_{11} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2C_*^o}\right),\quad a_{22} = \frac{\left(B_*^o\right)^2}{2C_*^o} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2C_*^o}\right).$$

Вычислим $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{30}$.

$$\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{30} =$$

$$= \left[-B_*^o + \left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right)\left(B_*^o - B^*\right) - \frac{1}{2}D^*\left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right)x_1 - \frac{1}{2}D^*\frac{B_*^o}{C_*^o}x_2\right]x_1^2 +$$

$$+\left[-B_*^o + \frac{B_*^o}{C_*^o}\left(C_*^o - C^*\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right)\cdot E^* x_1 - \frac{1}{2}\frac{B_*^o}{C_*^o}Ex_2\right]x_2^2 +$$

$$+\left[\left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right)\left(C_*^o - C^*\right) + \frac{B_*^o}{C_*^o}\left(B_*^o - {}^*\right)\right]x_1 x_2$$

или, рассматривая квадратичную форму

$$\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{2} e_{i_1 j_1} x_{i_1} x_{j_1} = -\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{30}, \qquad (34)$$

составим матрицу

$$e_{i_1 j_1} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$e_{11} = -B_*^o + \left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right)\left(B_*^o - B^*\right) - \frac{1}{2} D^* \left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right) x_1 - \frac{1}{2} D^* \frac{B_*^o}{C_*^o} x_2,$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right)\left(C_*^o - C^*\right) + -\frac{B_*^o}{C_*^o}\left(B_*^o - B^*\right)\right],$$

$$e_{22} = -B_*^o + \frac{B_*^o}{C_*^o}\left(C_*^o - C^*\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{C_*^o}\right) E_{x_1}^* - \frac{1}{2}\frac{B_*^o}{C_*^o} E_* x_2 \cdot$$

Для асимптотической устойчивости решения x=0 системы (30) достаточно, чтобы форма переменных $\{x_{i_1}\}$ в правой части равенства (34) была определенно отрицательной. Так как $e_{i_1 j_1}$ являются переменными, то неравенства Сильвестра (16) имеют вид

$$e_{11} > \gamma_1, \quad e_{11} \cdot e_{22} - e_{12}^2 > \gamma_1, \quad (\gamma_1 > 0). \qquad (35)$$

Условия (33) и (35) выражают условия асимптотической устойчивости системы (30).

Библиографический список

1. *Беген А.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1968. 192 с.

2. *Румянцев В.В.* О движении некоторых систем с неидеальными связями // Вестник МГУ. Сер. Математика. Механика. 1961. Вып. 5. С. 67–75.

3. *Азизов А.Г.* Прикладные задачи динамики управляемых систем / Учебное пособие. Ташкент. 1980. 28 с.

4. *Азизов А.Г.* Об уравнениях динамики систем с сервосвязями // Науч. тр. ТашГУ. 1975. Вып. 476. С. 67–75.

5. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.

6. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.

8. *Меркин Г.Д.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1987. 304 с.

9. *Азизов. А.Г.* Движение управляемых механических систем с сервосвязями // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 3. С. 366–372.

10. *Киргетов. В.И.* О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // Прикладная математика и механика 1967. Т. 31, вып. 3. С. 433–446.

11. *Азизов. А.Г.* К динамике систем, стесненных сервосвязями // Научные труды ТашГУ. 1971. Вып. 397. С. 3–9.

12. *Румянцев В.В*. О движении управляемых механических систем // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 5. С. 771–781.

13. *Сидиков М.Н.* Некоторые особенности стабилизации механических систем с условными связями. Ч. 2 // Проблемы механики. 2012. № 2. С. 3–5.

14. *Азизов. А.Г.* Вопросы аналитической динамики систем с сервосвязями: Дисс… д-ра физ.-мат. наук. М.: Наука. 1974. 220 с.